10.1.7 Větu o spojitosti a jejich užití

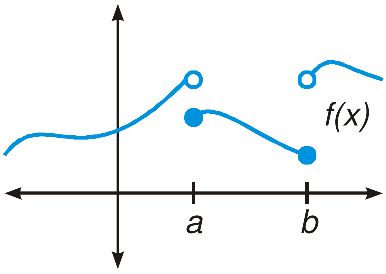
Předpoklady: 2706, 2718, 10106

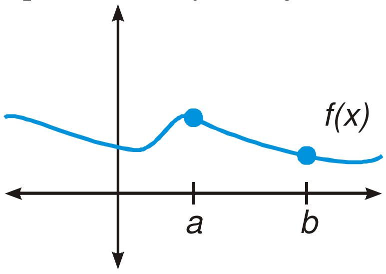
Pedagogická poznámka: Při probírání této hodiny je třeba mít na paměti, že všechny věty, které studentům sdělujete z jejich pohledu neuvěřitelně složitě sdělují naprosto zřejmé a jasné věci. Snažím se studentům vysvětlit, že obtížnou matematickou prací v tomto případě nebylo si všimnout popisovaných vlastností funkcí, ale vytvořit celou matematickou stavbu pod nimi a nalezení důkazů.

Pedagogická poznámka: Jedním z problémů této partie matematiky je naprostý chaos v pojmenování jednotlivých vět podle slavných matematiků, kteří se na jejich formulaci a důkazu podíleli. Držím se v učebnici pojmenování, které je použito v klasických středoškolských učebnicích Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet nakladatelství Prometheus (Hrubý a kol). Upozorňuji, že mimo hranice bývalého Československa se používá pojmenování jiné, držím se však toho, co je použito v literatuře nejbližší této učebnici.

Nejdůležitější věty o spojitosti jsou formulovány pro uzavřené intervaly $\langle a;b\rangle$ (tedy množiny $\langle a;b\rangle = \{x\in R; a\le x\le b\}$)

Takovou funkci si můžeme představit jako provázek, který držíme ve dvou rukou (provázek může v rukou končit, nebo může sahat dál, to pro naše účely nehraje roli)



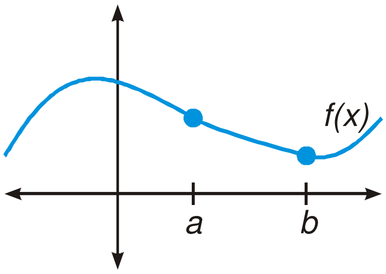


Věta Weierstrassova:
Je-li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu, existuje alespoň jeden takový bod $x_1 \in \langle a;b\rangle$, že pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$ platí $f(x)\le f(x_1)$, a alespoň jeden takový bod $x_2\in\langle a;b\rangle$, že pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$ platí $f(x)\ge f(x_2)$.

Co to vlastně znamená?
Věta má dvě části: nejdříve první: Je-li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu, existuje alespoň jeden takový bod $x_1\in\langle a;b\rangle$, že pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$ platí $f(x)\le f(x_1)$ $\Rightarrow$ v intervalu $\langle a;b\rangle$ je zvláštní tím, že jeho hodnota $f(x_1)$ je větší (nebo rovna) hodnotám všech ostatních *x* z intervalu $\Rightarrow$ spojitá funkce v uzavřeném intervalu nabývá alespoň v jednom bodě maxima
Druhá část věty: to samé, ale $f(x_2)$ je menší $\Rightarrow$ spojitá funkce v uzavřeném intervalu nabývá alespoň v jednom bodě minima

logické – když máme provázek ve dvou rukou nemůže se přiblížit k nekonečnu, aniž by se přetrhl

Př. 1: Na obrázku je nakreslena funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$. Urči čísla x_1, x_2 zmiňovaná ve Weierstrassově větě.



číslo x_1 je číslo, jehož hodnota je v intervalu $\langle a;b\rangle$ maximální $\Rightarrow$ $x_1 = a$

číslo x_2 je číslo, jehož hodnota je v intervalu $\langle a;b\rangle$ minimální $\Rightarrow$ $x_2 = b$

Důsledek Weierstrassovy věty:
Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$ je v tomto intervalu omezená.

Věta Bolzano-Weierstrassova
Je-li funkce *f* spojitá v $\langle a;b\rangle$ a $f(a)\neq f(b)$, potom, ke každému číslu *K*, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c\in(a;b)$, že $f(c)=K$.

$\Rightarrow$ funkce spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$ nabývá všech hodnot mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.

logické: pokud provázek není přetržený, musí přejít přes všechny mezihodnoty

Darbouxova vlastnost spojitých funkcí:
Je-li funkce *f* spojitá v $\langle a;b\rangle$ a mají-li $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, tj. $f(a)\cdot f(b)<0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $c\in(a;b)$, v němž platí $f(c)=0$.

logické: jestliže mají $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, je nula jednou z mezihodnot a funkce ji musí někde dosáhnout.
$\Rightarrow$
poslední vlastnost už jsme používali ve dvou případech (matematicky to nebylo legální, teprve teď by to bylo v pořádku)

1. Numerická metoda separace kořenů při řešení rovnic vyšších řádů
Hledáme řešení rovnice $x^3-2x+5=0$.
Hodnoty levé strany nám přiblíží funkce $y=x^3-2x+5$. Jak vypadá?
- pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny *x*)
- pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny *x*)
$\Rightarrow$ graf funkce musí projít přes osu *x* (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí). Místo, kde to udělá, je řešením rovnice.

Hledáme toto místo dosazováním:
dosadíme 0 $0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$ $\Rightarrow$ kořen je záporné číslo
dosadíme -3 $(-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 5 = -16$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;0)$
dosadíme -2 $(-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 5 = 1$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2)$
dosadíme –2,5 $(-2,5)^3 - 2 \cdot (-2,5) + 5 = -5,625$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,5;-2)$
dosadíme –2,1 $(-2,1)^3 - 2 \cdot (-2,1) + 5 = -0,061$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1;-2,0)$
A tak bychom se dosazovali dál, dokud bychom nezjistili kořen s dostatečnou přesností.

Př. 2: Urči kořen rovnice $x^3 + x^2 - 1 = 0$ s přesností na dvě desetinná místa.

- pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny *x*)
- pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny *x*)
$\Rightarrow$ graf funkce musí projít přes osu *x* (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí). Místo, kde to udělá, je řešením rovnice.
Hledáme toto místo dosazováním:
dosadíme 0 $0^3 + 0^2 - 1 = -1$ $\Rightarrow$ kořen je kladné číslo
dosadíme 1 $1^3 + 1^2 - 1 = 1$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0;1)$
dosadíme 0,5 $(0,5)^3 + (0,5)^2 - 1 = -0,625$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,5;1)$
dosadíme 0,7 $(0,7)^3 + (0,7)^2 - 1 = -0,167$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,7;1)$
dosadíme 0,8 $(0,8)^3 + (0,8)^2 - 1 = 0,152$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,7;0,8)$
dosadíme 0,75 $(0,75)^3 + (0,75)^2 - 1 = -0,015625$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,75;0,8)$
dosadíme 0,76 $(0,76)^3 + (0,76)^2 - 1 = -0,016576$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,75;0,76)$

2. Řešení nerovnic metodou nulových bodů
funkce může přejít z kladných do záporných hodnot pouze přes nulu nebo v místě, kde je přetržená $\Rightarrow$

- Zjistíme pro která *x* nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. **Našli jsme body přetržení.**
- Vyřešíme rovnici $f(x) = 0$ a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu *x*.**
- Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
- **Nerovnice je vyřešena.**

Př. 3: Vyřeš nerovnici $x^3 \geq x$ .metodou nulových bodů.

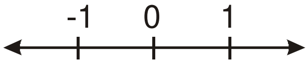
1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice
Obě strany nerovnice jsou definovány vždy.
2. Hledáme řešení rovnice $x^3 = x$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$ zkusíme levou stranu rozložit na součin:

$x\left(x^2-1\right) = x\left(x-1\right)\left(x+1\right) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

Zakreslíme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $\left(-\infty;-1\right)$: například číslo –2

  $\left(-2\right)^3 \geq \left(-2\right) \;\Rightarrow\; -8 \geq -2 \;\Rightarrow$ neplatí
- interval $\left(-1;0\right)$: například číslo –0,1

  $\left(-0{,}1\right)^3 \geq \left(-0{,}1\right) \;\Rightarrow\; -0{,}001 \geq -0{,}1 \;\Rightarrow$ platí
- interval $\left(0;1\right)$: například číslo 0,1

  $0{,}1^3 \geq 0{,}1 \;\Rightarrow\; 0{,}001 \geq 0{,}1 \;\Rightarrow$ neplatí
- interval $\left(1;\infty\right)$: například číslo 2

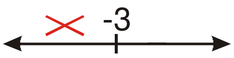
  $2^3 \geq 2 \;\Rightarrow\; 8 \geq 2 \;\Rightarrow$ platí

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body$\Rightarrow$ $K = \left\langle -1;0\right\rangle \cup \left\langle 1;\infty\right)$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x+3} \geq x+1$.metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice
levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$
řešíme nerovnici $x+3 \geq 0$

$x \geq -3$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \left\langle -3;\infty\right)$.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{x+3} = x+1$ (abychom objevili nulové body nerovnice, kde funkce přechází přes osu *x*).

$\sqrt{x+3} = x+1 \quad /^2$

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = \left(x+1\right)^2$

$x+3 = x^2+2x+1$

$0 = x^2+x-2$

$\left(x+2\right)\left(x-1\right) = 0$

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$

Zkouška:

$x_1 = -2$ $\quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{-2+3} = 1$ $\quad P = x+1 = -2+1 = -1$

$L \neq P$

$x_1 = 1$ $\quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2$ $\quad P = x+1 = 1+1 = 2$

$L = P$

$\Rightarrow$ jediný kořen $x = 1$

Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $(-3;1)$: vybereme číslo například 0:

  $\sqrt{x+3} \geq x+1$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{0+3} \geq 0+1$

  $\sqrt{3} \geq 1$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-3;1)$ je řešením,
- interval $(1;\infty)$: vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):

  $\sqrt{x+3} \geq x+1$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{6+3} \geq 6+1$

  $3 \geq 7$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(1;\infty)$ není řešením.

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidáme k nalezenému intervalu ještě nulové body$\Rightarrow$ $K = \langle -3;1 \rangle$.

Shrnutí: